Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, dV = \int_{\partial V} \vec{A}\cdot\vec{dS} \qquad \text{(Theorem de la divergence)}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\, dV = \vec{A}\cdot\vec{dS}$$

$$\begin{aligned}\vec{A}\cdot\vec{dS} &= A(r+dr,\theta,z)\,(r+dr)\,d\theta\, dz - A(r,\theta,z)\, r\, d\theta\, dz \\ &+ A(r,\theta+d\theta,z)\, dr\, dz - A(r,\theta,z)\, dr\, dz \\ &+ A(r,\theta,z+dz)\, dr\, r d\theta - A(r,\theta,z)\, dr\, r d\theta \\ &= d(rA_r)\, d\theta\, dz + d(A_\theta)\, dr\, dz + d(A_z)\, dr\, r d\theta\end{aligned}$$

$$\frac{\vec{A}\cdot\vec{dS}}{dV} = \frac{1}{dr\, r d\theta\, dz}\left(d(rA_r)\, d\theta\, dz + d(A_\theta)\, dr\, dz + dA_z\, dr\, r d\theta\right)$$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{d}{d\theta}(A_\theta) + \frac{d}{dz}(A_z)$$

Donc $\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{1}{r}\partial_r(rA_r) + \frac{1}{r}\partial_\theta(A_\theta) + \partial_z(A_z)}$

■

Gradient en coordonnées cylindriques :

$$\int_{P\to Q} \vec{\nabla}(\phi)\cdot\vec{dl} = \phi(Q) - \phi(P) \qquad \text{(Theorem du gradient)}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla}(\phi)\cdot\vec{dl} = \phi(r+dr,\theta+d\theta,z+dz) - \phi(r,\theta,z)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\nabla}(\phi) = d\phi\, \vec{dl}^{-1} = d\phi\,(dr, r d\theta, dz)^{-1}$$

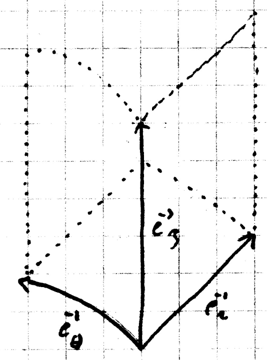
Donc $\boxed{\vec{\nabla}(\phi) = [\partial_r(\phi)] + [\frac{1}{r}\partial_\theta(\phi)] + [\partial_z(\phi)]}$

■

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\int_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot\vec{dS} = \int_{\partial S} \vec{A}\cdot\vec{dl} \qquad \text{(Theorem du rotationnel)}$$

$$\Leftrightarrow (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot\vec{dS} = \vec{A}\cdot\vec{dl}$$



$$\vec{A}\cdot d\vec{l} = \Big[-A_\theta(r,\theta,z+dz)\,r\,d\theta + A_\theta(r,\theta,z)\,r\,d\theta + A_z(r,\theta+d\theta,z)\,dz - A_z(r,\theta,z)\,dz\Big]$$

$$+\Big[+A_r(r,\theta,z+dz)\,dr - A_r(r,\theta,z)\,dr - A_z(r+dr,\theta,z)\,dz + A_z(r,\theta,z)\,dz\Big]$$

$$+\Big[-A_r(r,\theta+d\theta,z)\,dr + A_r(r,\theta,z)\,dr + A_\theta(r+dr,\theta,z)(r+dr)\,d\theta - A_\theta(r,\theta,z)\,r\,d\theta\Big]$$

$$= \Big[-d(A_\theta)\,r\,d\theta + d(A_z)\,dz\Big] + \Big[d(A_r)\,dr - d(A_z)\,dz\Big] + \Big[-d(A_r)\,dr + d(A_\theta r)\,d\theta\Big]$$

$$\frac{\vec{A}\cdot d\vec{l}}{dS} = \Big[-\partial_z(A_\theta) + \frac{1}{r}\partial_\theta(A_z)\Big] + \Big[\partial_z(A_r) - \partial_r(A_z)\Big] + \Big[-\frac{1}{r}\partial_\theta(A_r) + \frac{1}{r}\partial_r(A_\theta r)\Big]$$

$$\text{Donc}\quad \vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \Big[-\partial_z(A_\theta) + \frac{1}{r}\partial_\theta(A_z)\Big] + \Big[\partial_z(A_r) - \partial_r(A_z)\Big] + \Big[-\frac{1}{r}\partial_\theta(A_r) + \frac{1}{r}\partial_r(A_\theta r)\Big]$$

Nota bene :

- Attention à toujours savoir si l'on parle de vecteur ou non et à ne pas oublier la notation de ceux sous-entendus quand ils le sont.
- Dans les résultats finaux, les crochets représentent les composantes des vecteurs. (Pour le div et le gradient)
- Rappelons les trois versions du Théorème de Stokes :

$$\int_{P\to Q} \vec{\nabla}(\phi)\cdot d\vec{l} = \phi(Q) - \phi(P)$$

$$\int_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot d\vec{S} = \int_{\partial S} \vec{A}\cdot d\vec{l}$$

$$\int_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,dV = \int_{\partial V} \vec{A}\cdot d\vec{S}$$

Un moyen de vérifier/se rappeler de ces formules : l'intégrale doit évidemment porter sur un scalaire et non un vecteur.